Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebra II
Blatt 1

Abgabe von: Mein Name
Tutor: Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 2 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 1.1 **[1+0,5+2+0,5 Punkte]**

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass der Ring der Gauß'schen Zahlen $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$ versehen mit der Norm

$$\begin{aligned} N: \ \mathbb{Z}[i] &\to \mathbb{Z} \\ a+bi &\mapsto a^2+b^2 \end{aligned}$$

ein euklidischer Ring ist. Betrachten Sie hierfür zunächst $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\beta \neq 0$.

(a) Beweisen Sie, dass geeignete $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\alpha}{\beta} = r + si$ über $\mathbb{Q}(i)$ existieren.

Fixieren Sie nun geeignete $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\alpha}{\beta} = r + si$ über $\mathbb{Q}(i)$.

(b) Begründen Sie die Existenz geeigneter ganzer Zahlen p und q mit $|r-p|, |s-q| \leq \frac{1}{2}$.

Fixieren Sie geeignete $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $|r-p|, |s-q| \leq \frac{1}{2}$.

(c) Zeigen Sie, dass für $\rho := p + qi \in \mathbb{Z}[i]$ ein $\sigma \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\alpha = \rho\beta + \sigma$ und $N(\sigma) \leq \frac{1}{2}N(\beta)$ existiert.

(d) Folgern Sie, dass $(\mathbb{Z}[i], N)$ ein euklidischer Ring ist.

Lösung:

Aufgabe 1.2 **[2+1+1 Punkte]**

(a) Beweisen Sie die Irreduzibilität von 2, 3, $1+\sqrt{-5}$ und $1-\sqrt{-5}$ in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

(b) Zeigen Sie, dass 2, 3, $1+\sqrt{-5}$ und $1-\sqrt{-5}$ nicht paarweise assoziiert in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ sind.

(c) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ kein faktorieller Ring ist.

Lösung:

Aufgabe 1.3 **[2+2 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass $\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle$, $\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle$ und $\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle$ Primideale von $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ sind.

(b) Beweisen Sie über $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ die Gültigkeit der folgenden Gleichungen:

(i) $\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 3\rangle$

(ii) $\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle = \langle 1+\sqrt{-5}\rangle$

(iii) $\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 1-\sqrt{-5}\rangle$

(iv) $\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle = \langle 6\rangle$.

Lösung:

Aufgabe 1.4* **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei $D \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und $K := \mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{O}_K^\times$ für alle $D < 0$.

Sei nun $D := 2$ und $u := a + b\sqrt{D} \in \mathcal{O}_K^\times$ mit $u > 1$.

(b) Zeigen Sie $a \geq 1$ und $b \geq 1$.

(c) Beweisen Sie $1+\sqrt{2} \in \mathcal{O}_K^\times$ und die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ mit $u = \left(1+\sqrt{2}\right)^k$.

(d) Folgern Sie $\mathcal{O}_K^\times = \left\{\pm\left(1+\sqrt{2}\right)^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 29. April 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.